



DISTRIBUCIÓN DIAMÉTRICA DE *Pinus taeda* EN BELLA VISTA (CORRIENTES, ARGENTINA). TIPO Y COMPORTAMIENTO TEMPORAL

Cesar G. TORRES¹, Oscar W. REY¹, Cecilia LEZCANO¹

RESUMEN

En el presente trabajo se explora la distribución del diámetro de *Pinus taeda* en Bella Vista (Corrientes, AR). Los datos evaluados corresponden al diámetro normal (Dn), medido en 6 edades entre los 3 y 10,2 años en un rodal experimental de la especie. Se empleó tanto el enfoque de discretización como de estimación de funciones de distribución de probabilidades (fdp). Para el primero se empleó la regla de Sturges y en el segundo la estimación por máxima verosimilitud de las fdp Gamma, Normal y Weibull (2 y 3 parámetros). Complementariamente se evaluó explícitamente la distribución Normal del Dn con la prueba de Shapiro y mediante gráficos cuantil-cuantil. Se determinó que fue adecuada la verosimilitud de la función de distribución Normal en la descripción de la distribución del Dn.

Palabras claves: *función de distribución, verosimilitud, pino*

1. INTRODUCCIÓN

Conocer la distribución del diámetro normal (Dn) en plantaciones operativas es de importancia relativa para los gestores forestales. Un enfoque común en la descripción de las mismas es emplear el agrupamiento por clases de tamaño, cuya fortaleza reside en su pragmatismo y baja complejidad. En contrapartida, la construcción de clases diamétricas supone no tener en cuenta la naturaleza continua de la variable en estudio, ya que justamente la estrategia consiste en la discretización de la misma.

La especificación de una función de distribución de probabilidad (fdp) permite describir la distribución de una variable específica. Ello refleja su importancia, a la vez que la misma determina los métodos de estimación e inferencia, y posibilita reproducir fácilmente el proceso estocástico (simulación). Entre las fdp más empleadas se pueden enunciar la Gamma, Weibull (2 y 3 parámetros) y Normal (Robinson y Hamann, 2010; Hirigoyen y Rachid, 2014).

Hirigoyen y Rachid (2014), Quiñonez Barraza et al. (2015) y Uranga Valencia et al., (2018) se citan como ejemplos de trabajos en los que se determina que la distribución del Dn no corresponde a la Normal. En base a estos antecedentes y al contexto expuesto en los apartados precedentes, en el presente trabajo se propone evaluar la distribución del Dn en plantaciones de *Pinus taeda* realizadas en suelos arenosos de Bella Vista (Corrientes, Argentina).

2. MATERIALES Y MÉTODOS

Se emplearon datos de inventario de un ensayo de fertilización de *P. taeda* instalado en la EEA Bella Vista (Corrientes, AR) en el mes de octubre de 1995. El material de *P. taeda* correspondió a semillas de origen Marion, se empleó una densidad de 833 árboles.ha⁻¹. El ensayo se raleó selectivamente a los 4 y 5,5 años, con densidades resultantes de 580 y 415 árboles.ha⁻¹. Se analizaron los Dn de los inventarios realizados a las edades de 3; 5,4; 6,2; 7,3; 9,2 y 10,2 años. Rey et al. (en prensa) establecieron que el efecto del factor fertilización no resulta de significancia, por tanto, se evaluó la distribución conjunta de los datos en cada edad.

Se calculó el logaritmo de la verosimilitud conjunta como

¹ EEA INTA Bella Vista (rey.oscar@inta.gob.ar)



$$l(\hat{\theta}_t) = \log \prod_i p(x_i, \hat{\theta}_t)$$

donde $\hat{\theta}_t$ denota el estimador del vector de parámetros θ_t que maximiza l a la edad t y describe completamente la función de densidad p . Las expresiones evaluadas de p fueron Normal, Gamma, Weibull de dos y tres parámetros (Robinson y Hamann, 2010). Complementariamente se evaluó la hipótesis de distribución normal del Dn mediante la prueba de Shapiro en conjunto con gráficos cuantil a cuantil (Venables y Ripley, 2002). Finalmente se elaboraron gráficos de distribución en clases de diámetro, para lo cual se determinó el número de clases conforme a la regla de Sturges (clases = $1 + \log_2(N)$, con N como el número total de observaciones) (Scott, 2009).

3. RESULTADOS

El Cuadro 1 presenta los valores del logaritmo de la verosimilitud (a los datos) de las fdp Normal, Gamma y Weibull (de dos y tres parámetros). En todas las edades, ninguna de las fdp explicó la distribución del Dn de forma consistentemente superior a la función Normal. En tanto, la probabilidad de sostener el supuesto de distribución normal, conforme a la prueba de Shapiro (Cuadro 1), indica que las evidencias fueron suficientes solo a los 7,3 y a los 10,2 años. Es preciso observar que a los 5,4; 6,2 y 9,2 años la hipótesis de normalidad se rechazó marginalmente; mientras que las figuras cuantil a cuantil, Gráfico 1, denotan que los datos se alejaron de la normal solo a los 3 años y que fue posible asumir normalidad en las restantes edades.

Cuadro 1. Logaritmo de la verosimilitud de funciones de distribución de probabilidad al Dn de *Pinus taeda* en Bella Vista (Corrientes) y prueba de Shapiro.

Edad	Normal	Gamma	Weibull (2p)	Weibull (3p)	p
3,0	-1550,85	-1599,43	-1539,83	-1538,99	< 0,00
5,4	-1131,35	-1136,92	-1141,68	-1131,91	0,02
6,2	-783,56	-787,64	-791,05	-804,49	0,02
7,3	-827,61	-828,39	-841,89	-826,23	0,24
9,2	-770,72	-769,15	-791,49	-767,52	0,04
10,2	-790,78	-788,65	-814,14	-788,69	0,06

Nota: Mayor valor de verosimilitud indica mejor aproximación, 2p = dos parámetros, 3p = tres parámetros.

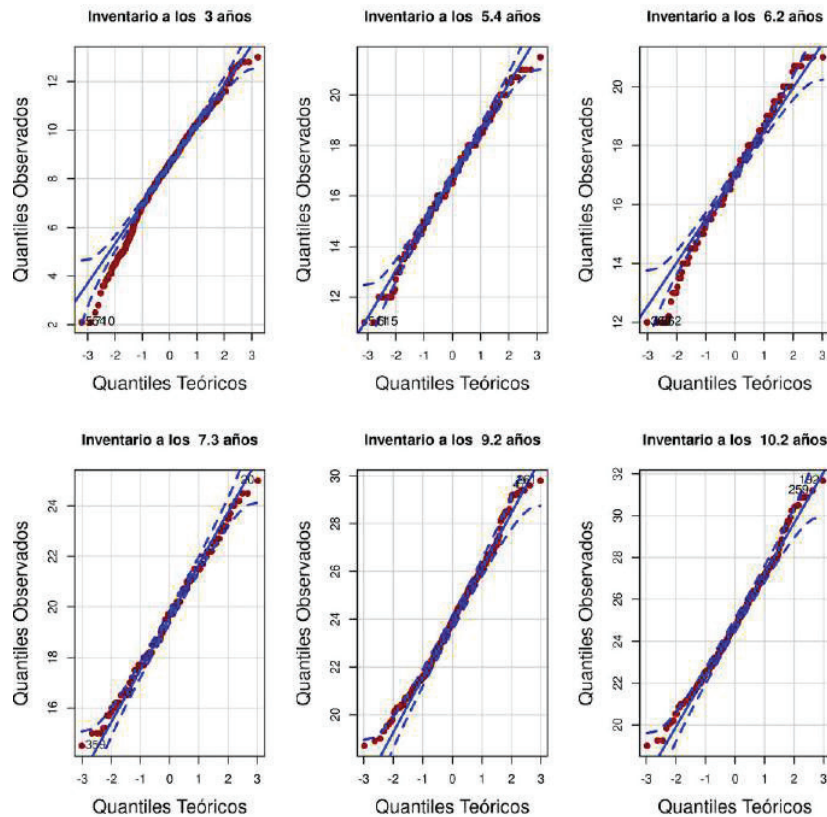


Gráfico 1. Figura cuantil-cuantil del D_n en *Pinus taeda* a diferentes edades.

En el Cuadro 2 se presentan los estimadores de los 4 primeros momentos de la distribución del D_n bajo normalidad. Los valores de asimetría, Skewness, siempre fueron menores a $|0,5|$, por tanto no se observaron asimetrías de consideración. La asimetría de mayor magnitud se obtuvo a los 3 años, la misma fue negativa (mayor acumulación hacia izquierda), el efecto disminuyó con los años y se transforma en positiva. La Kurtosis se aproximó a 3, valor esperado, en todas las edades. Al tercer año, edad a la cual la asimetría izquierda acumula probabilidad en dicha cola, fue levemente superior a 3. Las edades de 7,3 y 9,2 años denotaron valores relativamente menores al deseado, lo que indica la concentración de probabilidades cerca de la media.

Cuadro 2. Momentos de la distribución del D_n , bajo normalidad, a diferentes edades de *Pinus taeda* en Bella Vista (Corrientes).

Edad (Años)	$\hat{\mu}$ (cm)	$\hat{\sigma}^2$ (cm ²)	Skewness (ad)	Kurtosis (ad)
3,0	8,51 (0,06)	3,15 (< 0,00)	-0,46	3,44
5,4	16,70 (0,08)	3,43 (< 0,00)	-0,15	2,97
6,2	16,97 (0,08)	2,97 (< 0,00)	-0,18	3,07
7,3	19,61 (0,09)	3,75 (< 0,00)	0,02	2,69
9,2	23,95 (0,12)	4,91 (0,01)	0,22	2,73
10,2	24,83 (0,13)	5,66 (0,01)	0,28	2,92

Nota: Error estándar entre paréntesis.

El Gráfico 2 presenta la distribución en clases diamétricas del número de árboles referido a hectárea (panel A) y la f_{dp} Normal estimada (panel B). Esta última se denota en contraste con la frecuencia relativa observada por clases, lo que permite apreciar que dicha f_{dp} describió adecuadamente la distribución observada. Por otra parte, en el Gráfico 2 se advierte lo expresado previamente respecto de la forma de la distribución del D_n , asimetría, concentración y peso de colas.

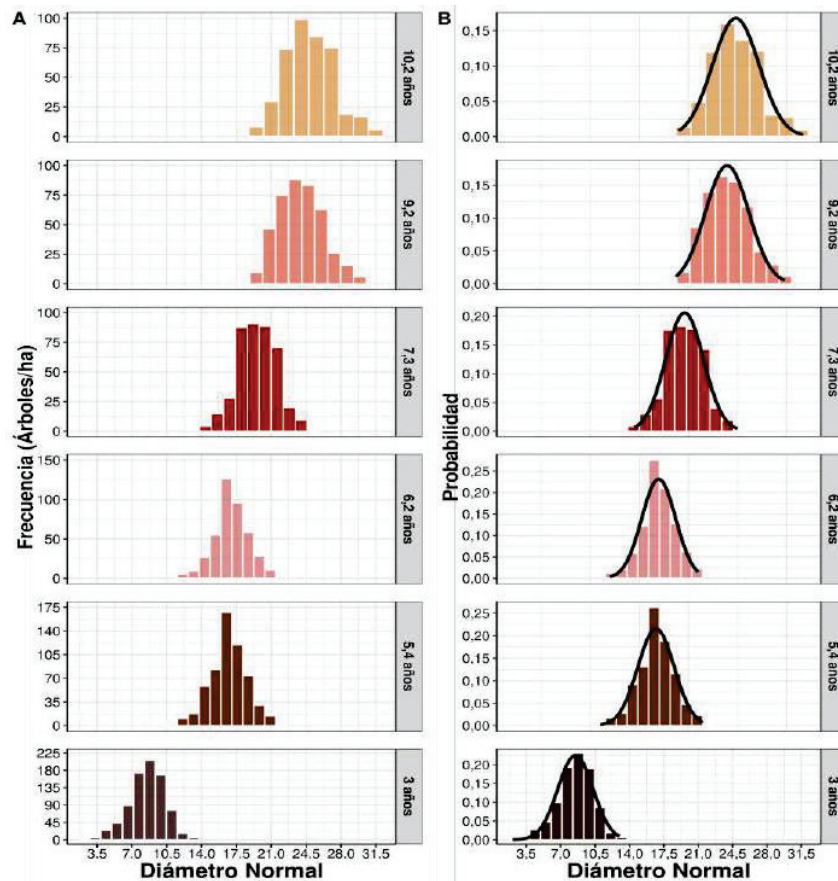


Gráfico 2. Evolución de la distribución del D_n de *Pinus taeda* en Bella Vista (Corrientes). **A)** Árboles en la hectárea por clases diamétricas. **B)** Función de distribución de probabilidad estimada (línea sólida) y frecuencia relativa por clases diamétricas (barras).

4. DISCUSIÓN

En Hirigoyen y Rachid (2014) se selecciona la curva SB de Johnson como fdp del D_n de *P. taeda*. Por su parte Quiñonez Barraza et al., (2015) y Uranga Valencia et al., (2018) seleccionan la distribución de Weibull. En estos trabajos no se evalúa la distribución Normal, tampoco efectos de localidad y edad que se mencionan para la fuente de datos. Por otra parte, al seleccionar una fdp diferente a la Normal se deben evaluar las propiedades de sus parámetros, estimadores y la distribución de sus predicciones, evaluación que no se realiza en estos trabajos. En contraste, en el presente trabajo se evidencia que ninguna de las fdp presenta una verosimilitud a los datos que sea consistentemente superior a la obtenida por la fdp Normal.

Quiñonez Barraza et al., (2015) y Uranga Valencia et al., (2018) establecen a priori el tipo de distribución; sin embargo, es deseable no saltarse el paso de selección de modelos. En Hirigoyen y Rachid (2014) y Quiñonez Barraza et al. (2015) se selecciona como método de estimación el de momentos en base a los resultados de ajuste y no por las propiedades de los estimadores. Sin embargo, Hirigoyen y Rachid (2014) coinciden con Casella y Berger (2002) al concluir que los estimadores de máxima verosimilitud son los de mínima variabilidad. En el presente trabajo las fdp se evalúan y seleccionan conforme al criterio de verosimilitud a los datos; en consecuencia, los estimadores de los momentos se obtienen maximizando la fdp seleccionada.

La exploración de la hipótesis de normalidad mediante el enfoque de prueba estadística en conjunto con la evaluación gráfica resulta adecuada. Esto se evidencia, porque la prueba de Shapiro es muy sensible a diferencias mínimas (Mohd Razali, 2011) y la misma debe ser empleada como una herramienta en la toma de decisiones. Asimismo, sostener la normalidad supone las ventajas, entre



otras, de poder describir completamente la distribución de los datos mediante dos parámetros, μ y σ^2 y emplear métodos clásicos de inferencia estadística. Las situaciones en las que no es posible sostener el supuesto de normalidad, como sucede en el Dn a los tres años, suponen realizar la inferencia o estimación con métodos que no requieran el mencionado supuesto o bien emplear transformaciones. Si es preciso emplear transformaciones, se recomienda la de Box-Cox (Núñez-Antón, 1997) a las logarítmicas o de radicandos. También se puede afirmar que para poder explorar posibles causales de la no normalidad de los datos se debe contar con información, que no se relevó en estas mediciones, que permitan dicha exploración, tal como estimación de errores de medición o sistematización del mismo.

Resulta conveniente el enfoque de describir la distribución de la variable Dn a partir de la estimación de su fdp, debido a su parsimonia y aplicabilidad. Dicho enfoque permite abordar los cambios en el tiempo de la distribución del Dn, bajo un único esquema de raleo selectivo, a partir de la descripción del comportamiento temporal del vector de parámetros de la fdp. Ello resulta conveniente a enfoques poco parsimoniosos como el empleado por Sanquetta et al. (1999) en el que se estiman 276 parámetros.

5. CONCLUSIÓN

Mediante el presente trabajo se determina que la fdp Normal describió de forma verosímil la distribución del Dn de *P. taeda* en Bella Vista (Corrientes, AR) entre los 5,4 y los 10,2 años. A los 3 años la distribución observada se aleja de la Normal y plantea la necesidad de estructuras de medición que permitan evaluar si ese comportamiento se debe a dificultades de medición con Dn menores a 6 cm. El estudio de fdp de variables aleatorias es de vital importancia en cualquier investigación y en particular la del Dn en investigaciones forestales. Por ello el mismo debe desarrollarse de forma que se pueda marginalizar los factores que la afectan, tales como sitio o edad.

6. BIBLIOGRAFÍA

- CASELLA, G. Y BERGER, R. L. 2002. Point Estimation in Statistical Inference (2° Ed). pp 311 – 367. Cengage Learning.
- HIRIGOYEN, A. Y RACHID, C. 2014. Selección de funciones de distribución de frecuencias diamétricas, para *Pinus taeda*, *Eucalyptus globulus* y *Eucalyptus dunii* en Uruguay. Bosque (Valdivia), 35(3), 369-376.
- MOHD RAZALI, N. Y YAP, B. 2011. Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests. J. Stat. Model. Analytics. 2.
- NÚÑEZ-ANTÓN, V. 1997. Longitudinal data analysis: non-stationary error structures and antedependent models. Applied Stochastic Models and Data Analysis, 13(3-4), 279-287.
- QUIÑONEZ BARRAZA, G.; DE LOS SANTOS POSADAS, H. M.; CRUZ COBOS, F.; VELÁZQUEZ MARTÍNEZ, A.; ÁNGELES PÉREZ, G. Y RAMÍREZ VALVERDE, G. 2015. Modelación dinámica de distribuciones diamétricas en masas mezcladas de Pinus en Durango, México. Madera y bosques, 21(2), 59-71.
- REY O. W., TORRES C. G. Y LEZCANO C. (en prensa). DESCRIPCIÓN DE VARIABLES DENDRO Y DASOMÉTRICAS DE *Pinus taeda* EN BELLA VISTA (CORRIENTES, ARGENTINA).
- ROBINSON, A. P. Y HAMANN, J. D. 2010. Forest analytics with R: an introduction. Springer Science & Business Media.
- SANQUETTA, C. R., ARCE, J. E., GOMES, F. D. Y CRUZ, E. D. 1999. Evaluación y simulación precoces del crecimiento de rodales de *Pinus taeda* L. con matrices de transición. Revista de Ciências Florestales, 7(1), 31-42.
- SCOTT, D. W. 2009. Sturges' rule. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 1(3), 303-306.
- URANGA VALENCIA, L. P., DE LOS SANTOS POSADAS, H. M., QUIÑONEZ BARRAZA, G., VILLAREAL RAMÍREZ, V. H., Y QUIROZ GUZMAN, T. 2018. Distribución weibull para *Pinus patula* schiede ex schldt. Et. Cham. En plantaciones forestales comerciales. Revista Biológico Agropecuaria Tuxpan, 6(2), 45–53. <https://doi.org/10.47808/revistabioagro.v6i2.152>.
- VENABLES, W. N. Y RIPLEY, B. D. 2002. Univariate Statistics in Modern applied statistics with S. (4ta edición). pp 107-133. Springer, New Yoork, NY.